DEVOIR DE SYNTHESE N°2

EXERCICE N°1 :	10'	3 points	

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des affirmations suivantes, **en justifiant la réponse**.

1°) Pour tout $x>0$, $f'(x)\geq 0$.

2°) Pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.

3°) $f(2)\leq \ln 2$.

EXERCICE N°2 :	30'	5 points	

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points : $A(3,-2,2)$; $B(6,1,5)$ et $C(6,-2,-1)$

1°) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A, puis calculer son aire.

2°) Montrer que le plan P dont une équation cartésienne est $x+y+z-3=0$, passe par A et perpendiculaire à la droite (AB).

3°) Donner une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à (AC)

4°) On considère le droite Δ donnée par le système de représentation paramétrique suivant :

$$\begin{cases} x=-1+ln(e^2.t) \\ y=2+ln\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (t\in IR_+^*) \\ z=ln(t) \end{cases}$$

a) Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant la droite Δ. (poser $\alpha=Ln(t)$)

b) Vérifier que le point $D(0,4,-1)$ appartient à la droite Δ.

c) Vérifier que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

5°) a) Vérifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, et calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

b) Déterminer une mesure (en radian) de l'angle BDC.

6°) a) Calculer l'aire du triangle BDC.

b) Déduire la distance A au plan (BDC).

7°) Préciser l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $(x+y+z-3)^2+(x-z-1)^2=0$

8°) Déterminer les centres des sphères tangentes au plan P en A et de rayon $r=3\sqrt{3}$

9°) Soit (S_m) la sphère de centre B et de rayon m. (avec $m\in IR_+^*$)

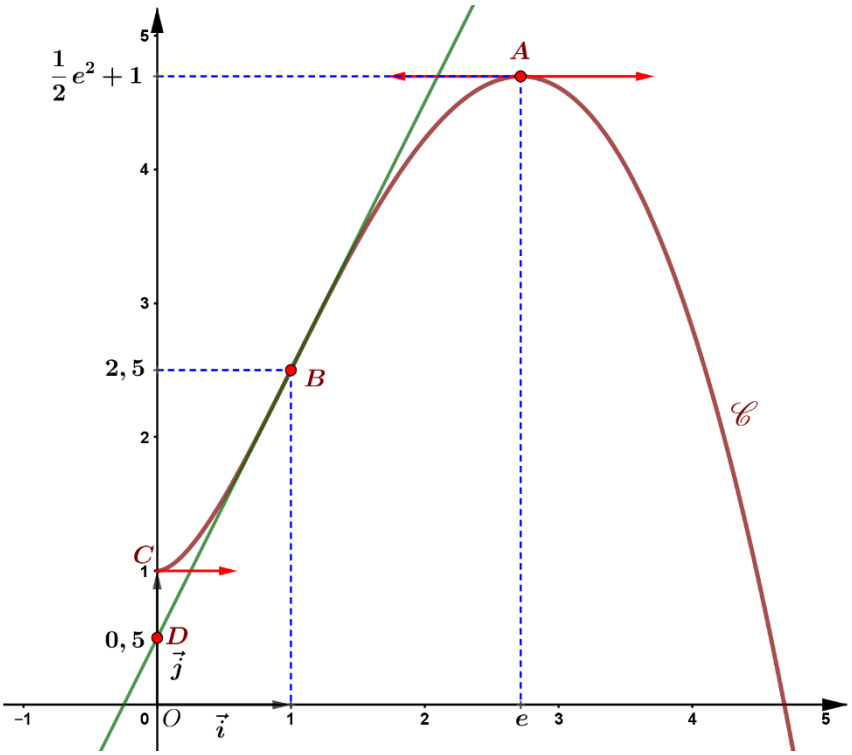
a) Déterminer les valeurs de m pour lesquels (S_m) et P sont sécants suivant un cercle de rayon 3.

b) Préciser : $(S_5\cap P)$ puis $(S_6\cap P)$.

EXERCICE N°3 :	30'	5 points	

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-x^2\ln(ax)+b \text{ , si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

- Les points A, B et C appartiennent à $\mathscr{C}$.
- La droite (BD) est la tangente à f au point B.
- $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1°) À l'aide d'une lecture graphique :

a) Déterminer $f'(1)$, $f'(e)$, $f''(1)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

2°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$, déduire que : $a=b=1$.

b) Etudier alors la dérivabilité de f à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y=\dfrac{1}{2}x^2+1$.

a) Etudier la position de $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathscr{C}$ sur $[0,+\infty[$.

b) Tracer sur $[0,+\infty[$ la partie de $\mathcal{P}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit $n\in IN^*$, on pose $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{e} x^2-x^2\ln x\,dx$.

a) Interprétation graphiquement I_n.

b) Exprimer I_n en fonction de n.

c) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la parabole $\mathcal{P}$ et les droite d'équations : $x=0$ et $x=e$.

EXERCICE N°4 :	40'	7 points	

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{4\ln x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Déterminer les coordonnés du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2°) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $h(x)=1-x+2\ln x$.

a) Etudier les variations de h sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet deux solutions dans $]0,+\infty[$, 1 et α, tel que : $3{,}51<\alpha<3{,}52$.

3°) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$ et on a placé le réel α.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: on a, $f(x)-g(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

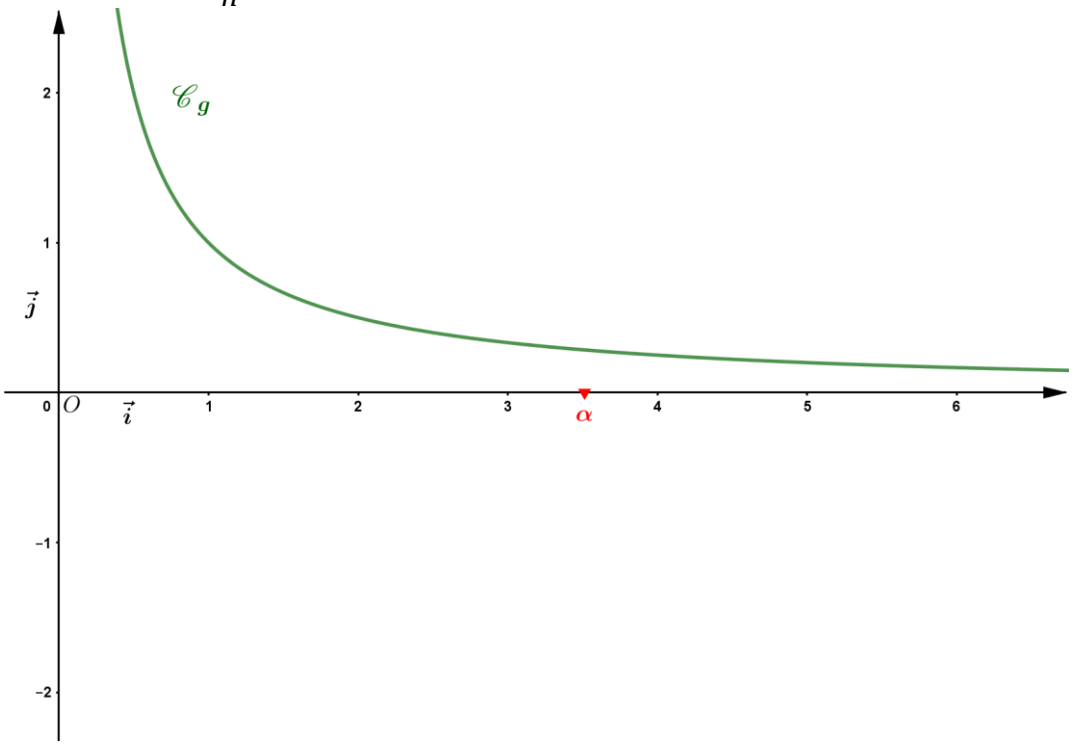
c) Tracer $\mathscr{C}_f$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire du domaine limité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

À l'aide d'une intégration par partie Montrer que : $\mathcal{A}(\alpha)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{2}{\alpha}-\dfrac{\alpha}{2}$.

6°) Pour tout entier $n\geq 1$ on considère les suites : $I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$ et $S_n=I_1+I_2+I_3+\cdots+I_{n-1}$.

Montrer que : $S_n=\dfrac{3(n-1)-2\ln n}{n}$, En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=3$.



Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com